

第 2 节 选解析式与选图象 (★★)

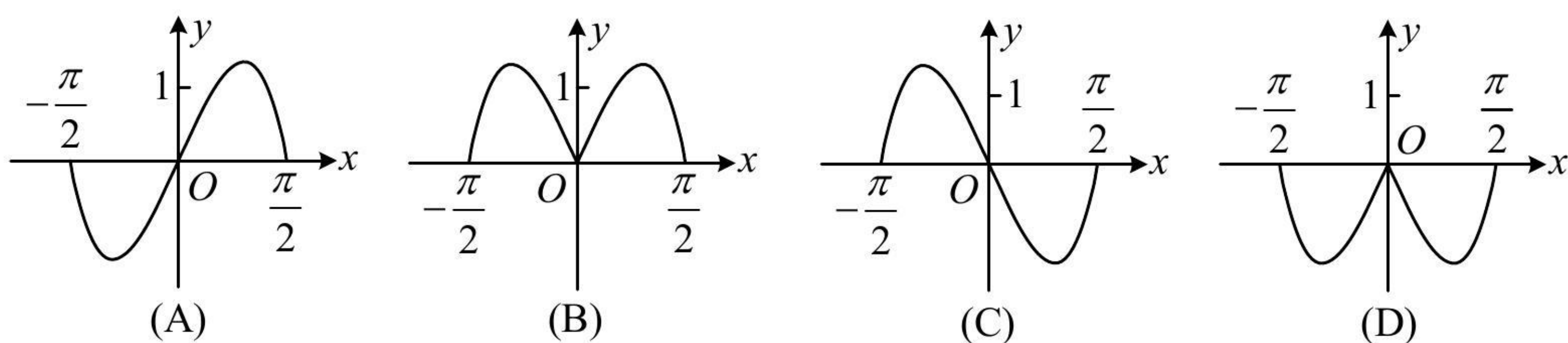
内容提要

本节归纳选解析式与选图象的有关考题,这类题考查的是函数的性质,用排除法选答案是通法,一般可以从以下的一些角度考虑:①奇偶性;②特殊点(或某区间)的函数值;③单调性;④图象变化趋势(极限情况)等.

典型例题

类型 I: 给解析式选图象

【例 1】(2022·全国甲卷) 函数 $y = (3^x - 3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的大致图象为 ()



解析: A、C 为奇函数, B、D 为偶函数, 所以先从奇偶性排除两个选项,

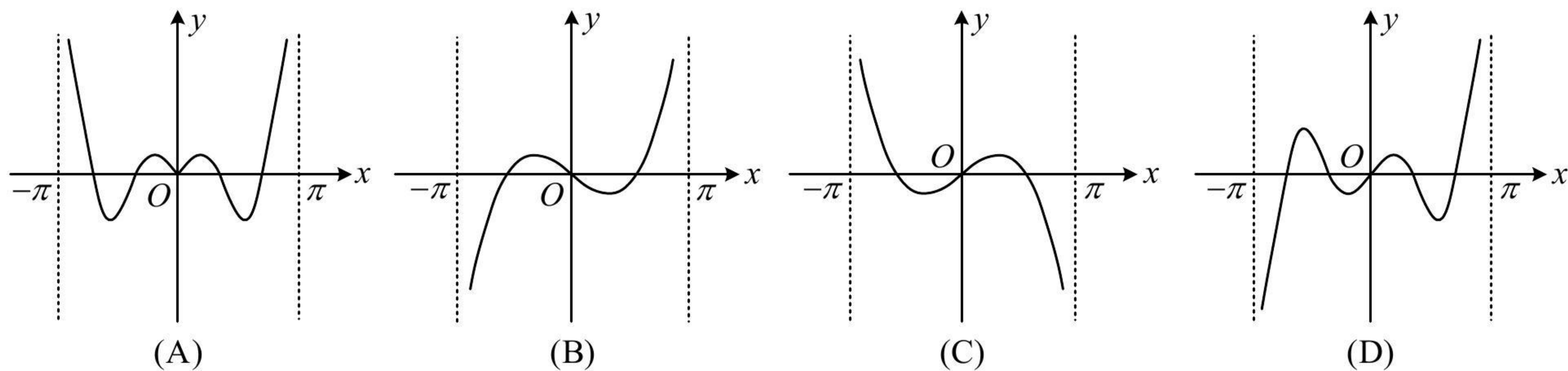
记 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\cos x$, 则 $f(-x) = (3^{-x} - 3^x)\cos(-x) = (3^{-x} - 3^x)\cos x = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数, 排除 B、D; 选项 A、C 的差异为函数值的正负,

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $3^x - 3^{-x} > 0$, $\cos x > 0$, 故 $f(x) > 0$, 排除 C, 选 A.

答案: A

【例 2】函数 $f(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos x}$ ($-\pi < x < \pi$) 的大致图象为 ()



解析: 选项 A 关于 y 轴对称, 其余关于原点对称, 所以可先判断奇偶性,

$$f(-x) = \frac{\sin 3(-x)}{1 + \cos(-x)} = -\frac{\sin 3x}{1 + \cos x} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ 为奇函数, 排除 A;}$$

B 和 C、D 在 y 轴右侧附近函数值正负不同, 所以计算 y 轴右侧附近某处的函数值,

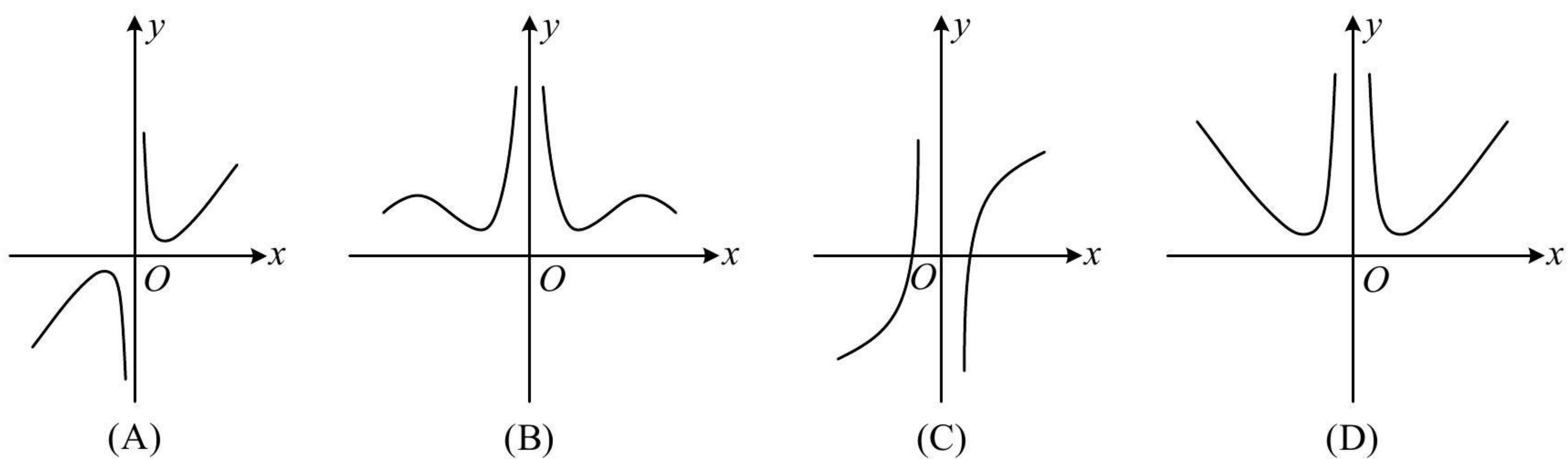
例如, $f(0.1) = \frac{\sin 0.3}{1 + \cos 0.1} > 0$, 从而可排除 B;

选项 C、D 怎么看呢？它们的明显差异是 $(0, \pi)$ 上的零点个数不同，所以可分析零点个数来排除，

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ ，故 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有零点 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ ，排除 C，选 D.

答案：D

【例 3】函数 $f(x) = \frac{|x|x^2 - \ln|x|}{x^2}$ 的大致图象为 ()



解析：所给图象中有关于原点对称的，有关于 y 轴对称的，所以先判断奇偶性，

$f(-x) = \frac{|-x|(-x)^2 - \ln|-x|}{(-x)^2} = \frac{|x|x^2 - \ln|x|}{x^2} = f(x) \Rightarrow f(x)$ 为偶函数，排除 A、C；

选项 B、D 在 $x \rightarrow +\infty$ 时趋势不同，可分析极限来排除选项，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) = \frac{|x|x^2 - \ln|x|}{x^2} = x - \frac{\ln x}{x^2}$ ，

注意到 $\frac{\ln x}{x^2}$ 这个部分，尽管分子分母都趋于 $+\infty$ ，但我们知道 $\ln x$ 趋于 $+\infty$ 的速率比 x^2 慢，

所以这部分极限为 0，从而 $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow +\infty$ ，排除 B，选 D.

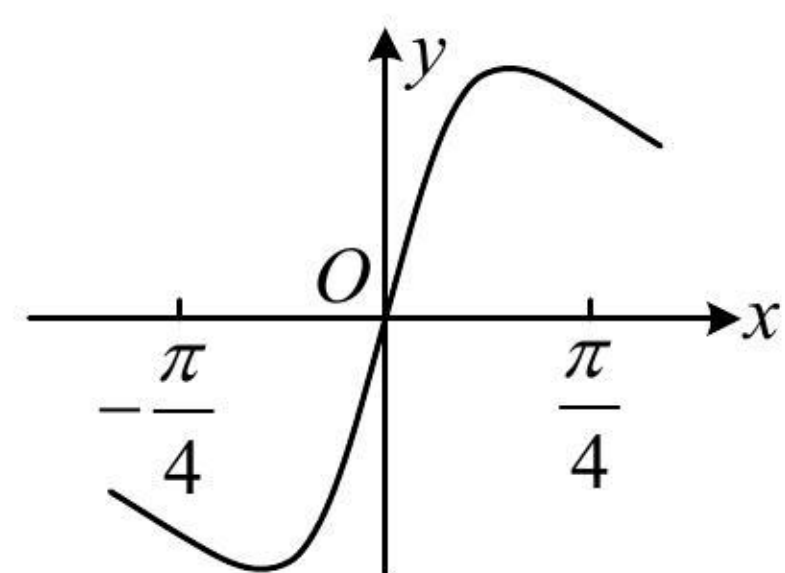
答案：D

【反思】 $y = a^x (a > 1)$ ， $y = \log_b x (b > 1)$ ， $y = x^m (m > 0)$ 这三类函数，当 $x \rightarrow +\infty$ 时，函数值 y 都趋于 $+\infty$ ，但从增长速率来看， $y = a^x$ 最快， $y = x^m$ 其次， $y = \log_b x$ 最慢.

类型 II：给图象选解析式

【例 4】(2021 · 浙江卷) 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ ， $g(x) = \sin x$ ，则图象为右图的函数可能是 ()

(A) $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$ (B) $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$ (C) $y = f(x)g(x)$ (D) $y = \frac{g(x)}{f(x)}$



解析：这道题是给了图象，反过来让选解析式，我们应挖掘所给图象的性质，并用它们来验证选项是否与之吻合，这里图象反映的信息有奇偶性、 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上的单调性等方面，

A 项， $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4} = x^2 + \sin x$ 为非奇非偶函数，与图象不符，故 A 项错误；

B 项， $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4} = x^2 - \sin x$ 为非奇非偶函数，与图象不符，故 B 项错误；

C 项，令 $h(x) = f(x)g(x)$ ，则 $h(x) = (x^2 + \frac{1}{4})\sin x$ ，所以 $h'(x) = 2x\sin x + (x^2 + \frac{1}{4})\cos x$ ，

故 $h'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + (\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ ，即 $h(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线斜率为正，与图象不符，排除 C，选 D.

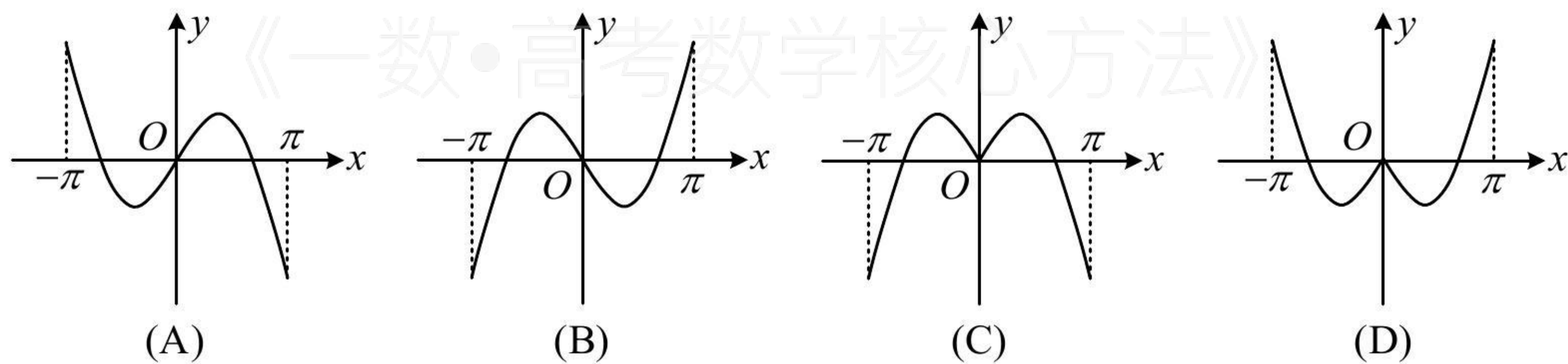
也可直接分析选项 C 的函数在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上的单调性，当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时， $f(x)$ 和 $g(x)$ 均 \nearrow ，且 $f(x) > 0$ ，

$g(x) > 0$ ，所以 $y = f(x)g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上为增函数，与图象不符，从而得出 C 项错误.

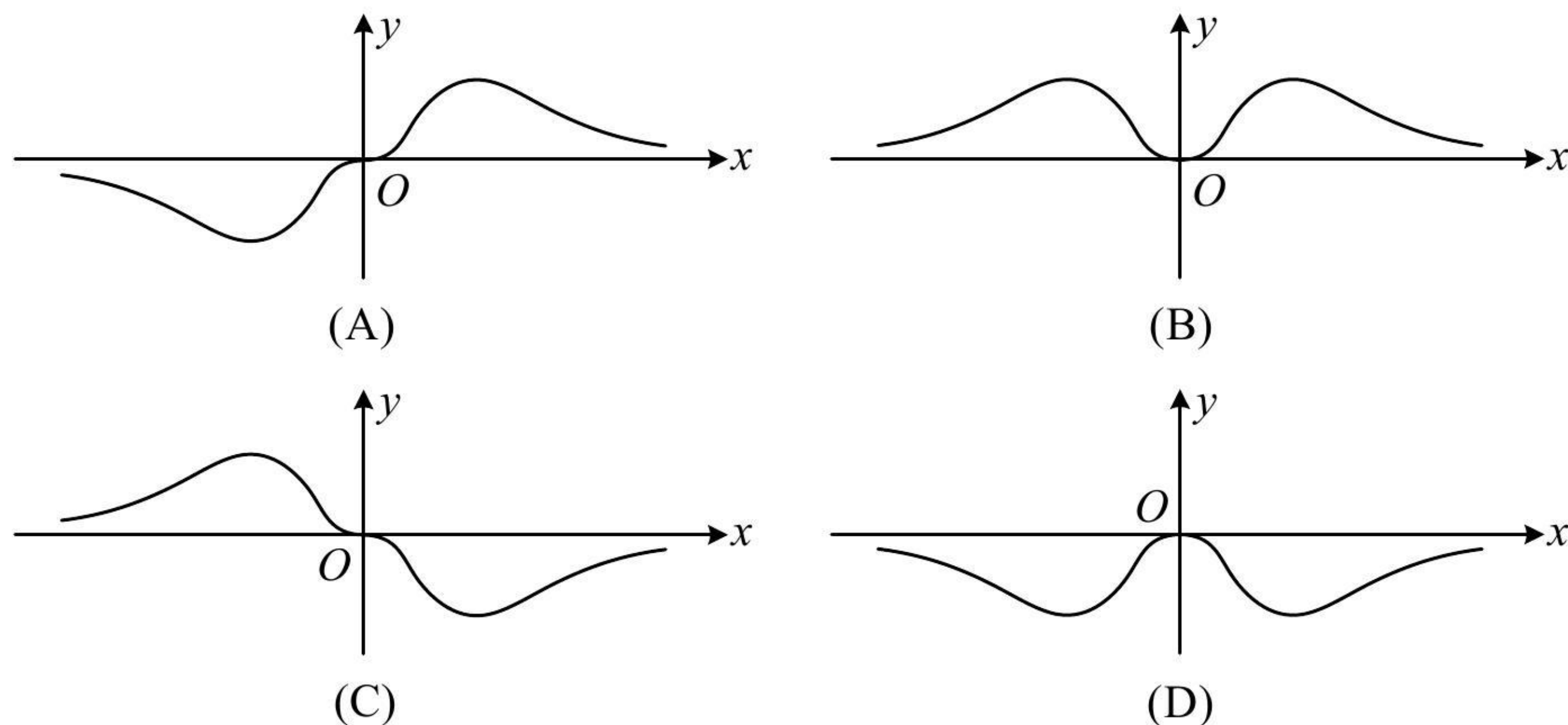
答案：D

强化训练

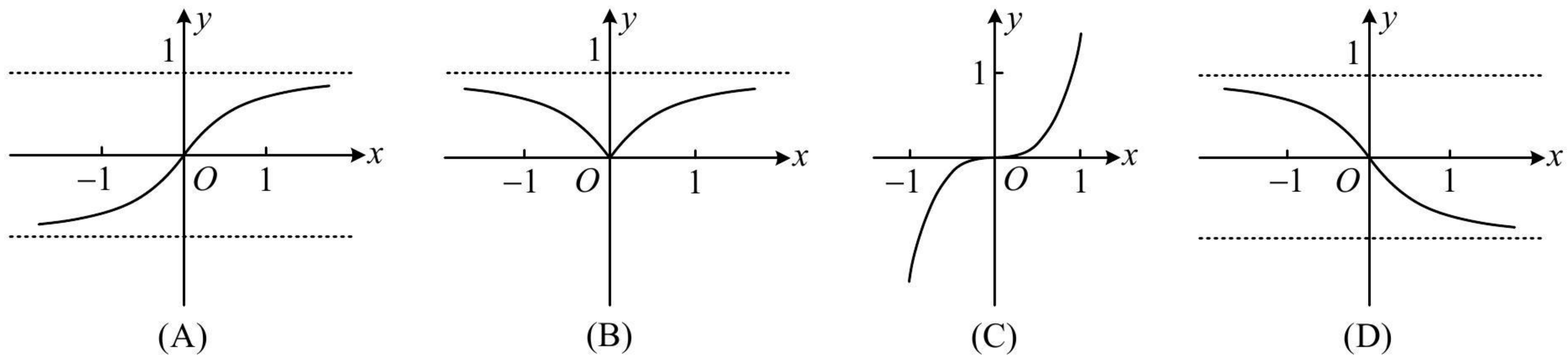
1. (2020 · 浙江卷 · ★) 函数 $y = x \cos x + \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的图象可能是 ()



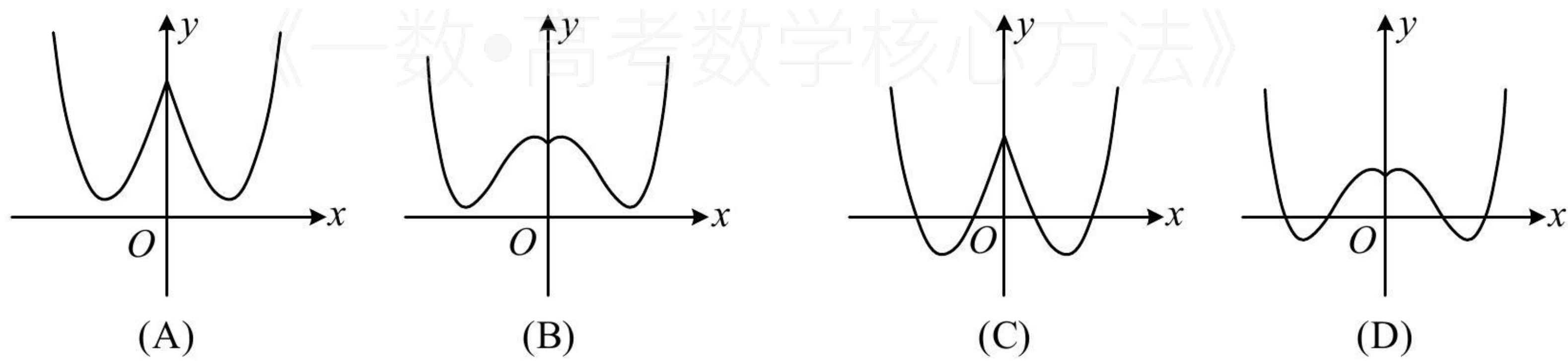
2. (2022 · 湖北月考 · ★) 函数 $f(x) = \frac{x^3}{3^x + 3^{-x}}$ 的部分图象大致为 ()



3. (2022 · 浙江衢州期末 · ★★★) 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致为 ()



4. (2022 · 浙江期中 · ★★★) 已知函数 $f(x) = e^{|x|} - 2x^2$, 则 $f(x)$ 的图象可能是 ()



5. (2022 · 全国乙卷 · ★★★) 右图是下列四个函数中的某个函数在 $[-3, 3]$ 的大致图象, 则该函数是 ()

(A) $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$ (B) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ (C) $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$ (D) $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$

